新基礎数学改訂版

6章　図形と式　　§2　2次曲線（p.183〜p.198）

問1

（1）$\{x-(-2)\}^2+(y-1)^2=3^2$

$\boldsymbol{(x+2)^2+(y-1)^2=9}$

（2）原点を中心とする円は，半径をrとすると

$x^2+y^2=r^2$であるから，$(1,\ -1)$を代入して

$1^2+(-1)^2=r^2$

よって，$r^2=2$

したがって，求める円の方程式は，

$\boldsymbol{x^2+y^2=2}$

（3）円の中心の座標は，与えられた2点の中点だから

$\left(\dfrac{6+(-2)}{2},\ \dfrac{1+7}{2}\right)=(2,\ 4)$

半径は，この中心と点$(6,\ 1)$との距離だから

$\sqrt{(6-2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{25}=5$

よって，求める円の方程式は，

$(x-2)^2+(y-4)^2=5^2$

$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-4)^2=25}$

問2

（1）$(x^2+6x)+(y^2-4y)-3=0$

$(x+3)^2-9+(y-2)^2-4-3=0$

$(x+3)^2+(y-2)^2=16$

よって，**中心$(-3,\ 2)$，半径4**

（2）$(x^2-x)+(y^2-2y)+1=0$

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+(y-1)^2-1+1=0$

$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{4}$

よって，**中心$\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$，半径$\dfrac{1}{2}$**

問3

求める円の方程式を，

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

とおくと，この円が，与えられた3点を通るから

$$\begin{cases}1+1+a-b+c=0\\4+1+2a+b+c=0\\9+4+3a-2b+c=0\end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases}a-b+c=-2\\2a+b+c=-5\\3a-2b+c=-13\end{cases}$$

これを解いて，$(a,\ b,\ c)=(-5,\ 1,\ 4)$

よって，求める方程式は，

$\boldsymbol{x^2+y^2-5x+y+4=0}$

また，この方程式を変形すると，

$(x^2-5x)+(y^2+y)+4=0$

$\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+4=0$

$\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{10}{4}$

よって，**中心$\left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，半径$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$**

問4

点Pの座標を$(x,\ y)$とすると

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AP}^2=(x-2)^2+y^2\\\mathrm{BP}^2=(x+6)^2+(y-4)^2\end{array}\right\}\cdots①$$

$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=42$に①を代入すると

$(x-2)^2+y^2+(x+6)^2+(y-4)^2=42$

$x^2-4x+4+y^2+x^2+12x+36+y^2-8y+16=42$

$2x^2+8x+2y^2-8y=-14$

$x^2+4x+y^2-4y=-7$

$(x+2)^2-4+(y-2)^2-4=-7$

$(x+2)^2+(y-2)^2=1$

よって，求める軌跡は，

中心$(-2,\ 2)$，半径1の円である．

問5

楕円の方程式は

$\dfrac{x^2}{6^2}+\dfrac{y^2}{5^2}=1$

$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{25}=1}$

焦点の座標は

$\left(\pm\sqrt{6^2-5^2},\ 0\right)=(\pm11,\ 0)$

$\boldsymbol{(\sqrt{11},\ 0),\ (-\sqrt{11},\ 0)}$

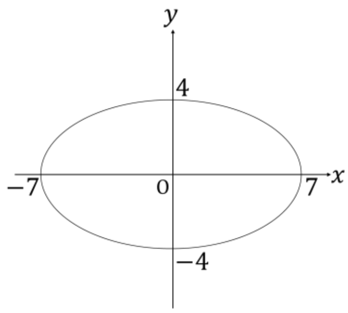
問6

（1）$\dfrac{x^2}{7^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$ より，焦点の座標は，

$$\left(\pm\sqrt{7^2-4^2},\ 0\right)=\left(\pm\boldsymbol{\sqrt{33}},\ \mathbf{0}\right)$$

長軸の長さは，$2\cdot 7=\mathbf{14}$

短軸の長さは，$2\cdot 4=\mathbf{8}$



（2）両辺を9で割ると

$$x^2+\frac{y^2}{9}=1$$

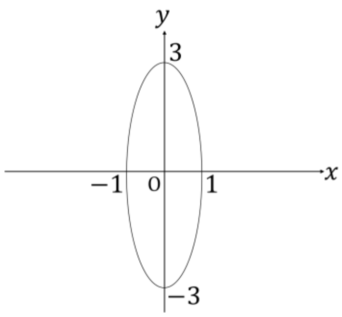
$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

焦点の座標は，

$$\left(0,\ \pm\sqrt{3^2-1^2}\right)=\left(\mathbf{0},\ \pm\boldsymbol{2\sqrt{2}}\right)$$

長軸の長さは，$2\cdot 3=\mathbf{6}$

短軸の長さは，$2\cdot 1=\mathbf{2}$



（3）両辺を9で割ると

$$x^2+\frac{16y^2}{9}=1$$

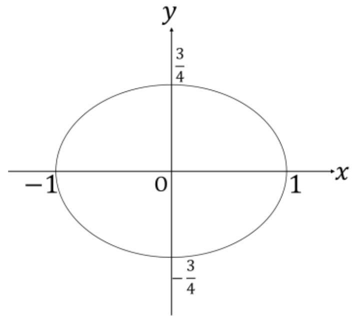
$$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=1$$

焦点の座標は，

$$\left(\pm\sqrt{1^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2},\ 0\right)=\left(\pm\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}},\ \mathbf{0}\right)$$

長軸の長さは，$2\cdot 1=\mathbf{2}$

短軸の長さは，$2\cdot\dfrac{3}{4}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$



問7

長軸の長さを$2a$とする．

また，$2b=6$とすると，$b=3$であるから，

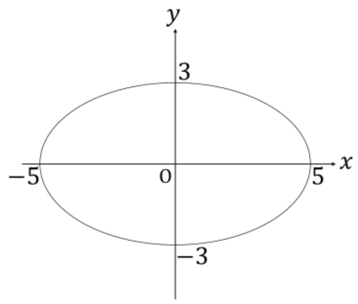
$$\sqrt{a^2-3^2}=4$$

$$a^2-9=16$$

$$a^2=25$$

よって，楕円の方程式は，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1}$$



問8

長軸の長さを$2b$とする．

また，$2a=4$とすると，$a=2$であるから，

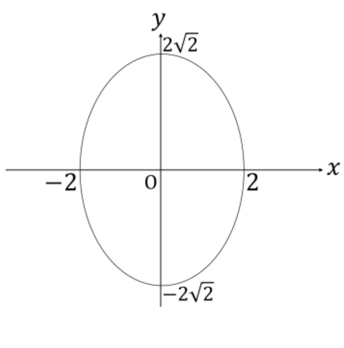
$$\sqrt{b^2-2^2}=2$$

$$b^2-4=4$$

$$b^2=8$$

よって，楕円の方程式は，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1}$$



問 9

（１）$\dfrac{x^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{1^2}=1$

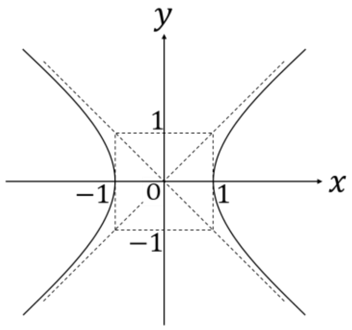
焦点の座標は，

$(\pm\sqrt{1+1},\ 0)=\boldsymbol{(\pm\sqrt{2},\ 0)}$

漸近線の方程式は

$$y=\pm\frac{1}{1}x$$

$$\boldsymbol{y=\pm x}$$

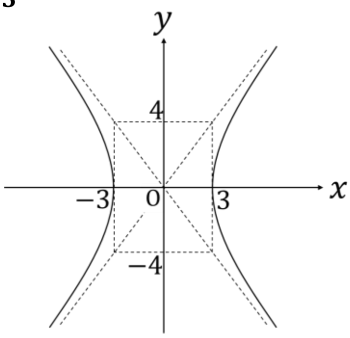


（２）焦点の座標は，

$(\pm\sqrt{9+16},\ 0)=\boldsymbol{(\pm 5,\ 0)}$

漸近線の方程式は

$$\boldsymbol{y=\pm\frac{4}{3}x}$$



（３）両辺を9で割ると

$$x^2-\frac{4y^2}{9}=1$$

$$\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$$

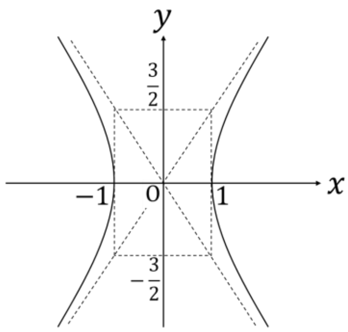
焦点の座標は，

$$\left(\pm\sqrt{1+\frac{9}{4}},\ 0\right)=\boldsymbol{\left(\pm\frac{\sqrt{13}}{2},\ 0\right)}$$

漸近線の方程式は

$$y=\pm\frac{\frac{3}{2}}{1}x$$

$$\boldsymbol{y=\pm\frac{3}{2}x}$$



問 10

$4^2-2^2=12$より，双曲線の方程式は，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1}$$

漸近線の方程式は

$$y=\pm\frac{\sqrt{12}}{2}x$$

$$\boldsymbol{y=\pm\sqrt{3}x}$$

問 11

（１）$\dfrac{x^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{1^2}=-1$

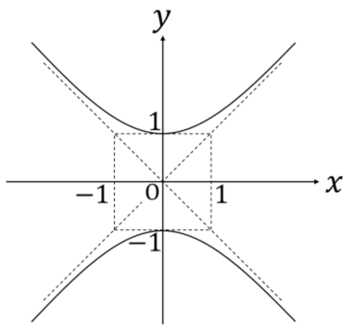
焦点の座標は，

$(0,\ \pm\sqrt{1+1})=\boldsymbol{(0,\ \pm\sqrt{2})}$

漸近線の方程式は

$$y=\pm\frac{1}{1}x$$

$$\boldsymbol{y=\pm x}$$

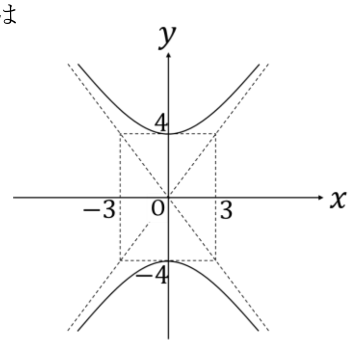


（２）焦点の座標は，

$(0,\ \pm\sqrt{9+16})=\boldsymbol{(0,\ \pm 5)}$

漸近線の方程式は

$$\boldsymbol{y=\pm\frac{4}{3}x}$$



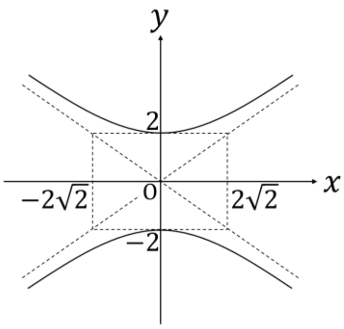
（３）焦点の座標は，

$$\left(0,\ \pm\sqrt{8+4}\right)=\left(\mathbf{0},\ \pm\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}\right)$$

漸近線の方程式は

$$y=\pm\frac{2}{2\sqrt{2}}x$$

$$\boldsymbol{y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x}$$

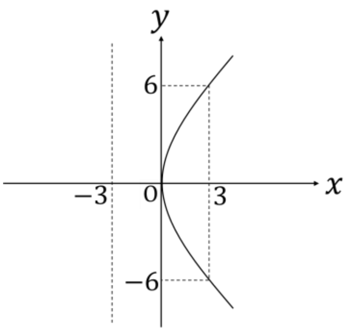


問 12

放物線の方程式は，

$y^2=4\cdot3x$

$\boldsymbol{y^2=12x}$



問 13

（１）$y^2=4\cdot5x$より，

焦点の座標は，$(\mathbf{5},\ \mathbf{0})$

準線の方程式は，$\boldsymbol{x=-5}$

（２）$y^2=4\cdot(-4)x$より，

焦点の座標は，$(\mathbf{-4},\ \mathbf{0})$

準線の方程式は，$\boldsymbol{x=4}$

（３）$x^2=4\cdot1y$より

焦点の座標は，$(\mathbf{0},\ \mathbf{1})$

準線の方程式は，$\boldsymbol{y=-1}$

（４）$x^2=4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)y$より

焦点の座標は，$\left(\mathbf{0},\ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$

準線の方程式は，$\boldsymbol{y=\frac{1}{4}}$

問 14

$y=2x+k$を，$x^2=-y$に代入して整理すると，

$x^2=-2x-k$

$x^2+2x+k=0$

この２次方程式の判別式をDとすると，直線が

放物線に接するための条件は，$D=0$であるから，

$$\frac{D}{4}=1^2-k$$

$$=1-k=0$$

したがって，$\boldsymbol{k=1}$

問 15

求める接線の方程式を，$y=-x+k$とおく．

$y=-x+k$を$x^2-\frac{y^2}{4}=-1$に代入して整理すると，

$$x^2-\frac{(-x+k)^2}{4}=-1$$

$4x^2-(x^2-2kx+k^2)=-4$

$3x^2+2kx-k^2+4=0$

この２次方程式の判別式をDとすると，直線が

双曲線に接するための条件は，$D=0$であるから，

$$\frac{D}{4}=k^2-3(-k^2+4)$$

$$=k^2+3k^2-12$$

$$=4k^2-12=0$$

これより，$k=\pm\sqrt{3}$

したがって，求める接線の方程式は，

$\boldsymbol{y=-x\pm\sqrt{3}}$

問 16

（１）$\boldsymbol{4x+3y=25}$

（２）$\boldsymbol{-3x+4y=25}$

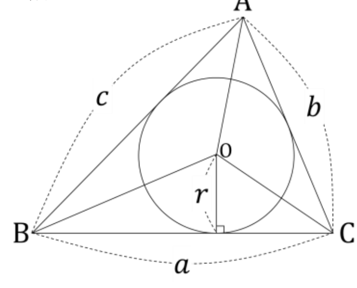
（３）$5x+0\cdot y=25$

$\boldsymbol{x=5}$

問 17

下の図のように，内心をOとし，Oと△ABCの

各項点を結ぶ.



$\triangle \mathrm{ABC} = \triangle \mathrm{OBC} + \triangle \mathrm{OCA} + \triangle \mathrm{OAB}$であるから，

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)r$$

問 18

3辺の長さが4，5，7の三角形の面積をSとすると，

$\dfrac{4+5+7}{2} = 8$ であるから，ヘロンの公式より，

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)} \\ &= \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} \\ &= \sqrt{2^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} \\ &= 2^2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 1} \\ &= 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

一方，内接円の半径をrとすると，

$$S = \frac{1}{2}(4 + 5 + 7)r$$

であるから，

$$\frac{1}{2}(4 + 5 + 7)r = 4\sqrt{6}$$

これを解いて，

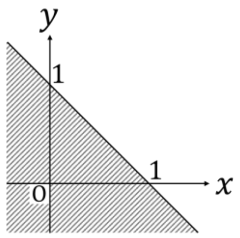
$$8r = 4\sqrt{6}$$

$$r = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

したがって，**面積 $4\sqrt{6}$，半径 $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$**

問 19

（1）求める領域は，直線$y = -x + 1$の下側の部分である．

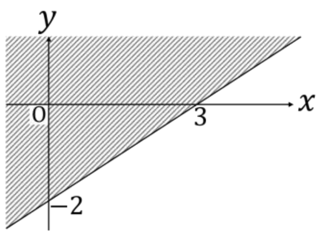


ただし，**境界を含まない．**

（2）不等式を変形して，

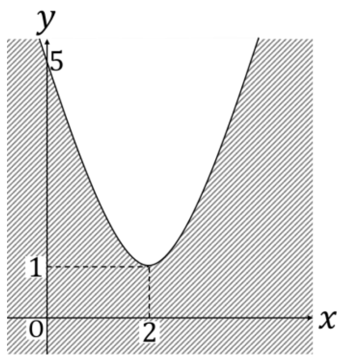
$$y \geqq \frac{2}{3}x - 2$$

求める領域は，$y = \dfrac{2}{3}x - 2$ の上側の部分である．



ただし，**境界を含む．**

（3）求める領域は，放物線$y = (x - 2)^2 + 1$の下側の部分である．

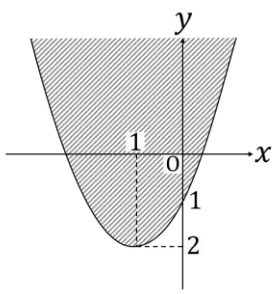


ただし，**境界を含む．**

（4）不等式を変形して，

$$y > x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2$$

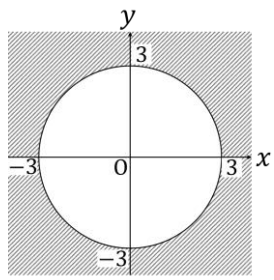
求める領域は，放物線$y = (x + 1)^2 - 2$の上側の部分である．



ただし，**境界を含まない．**

問 20

（1）求める領域は，円$x^2 + y^2 = 9$の外部である．



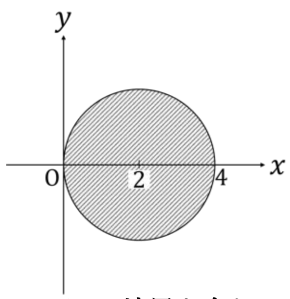
ただし，**境界を含まない．**

（2）不等式を変形して，

$$(x - 2)^2 - 4 + y^2 \leqq 0$$

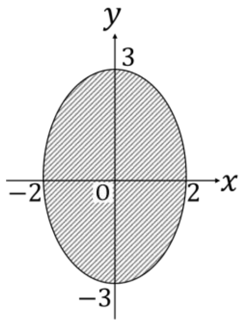
$$(x - 2)^2 + y^2 \leqq 4$$

求める領域は，$(x - 2)^2 + y^2 \leqq 4$の内部である．



ただし，**境界を含む.**

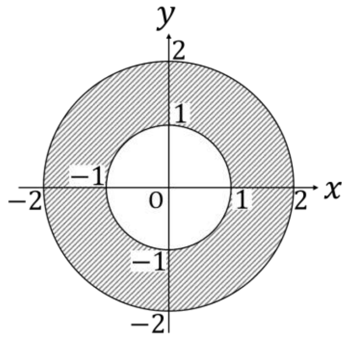
（３）求める領域は，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の内部である.



ただし，**境界を含まない.**

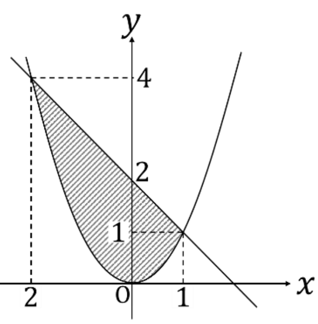
$\boxed{\text{問 21}}$

（１）$x^2+y^2>1$の表す領域は，円$x^2+y^2=1$の外部である．また，$x^2+y^2<4$の表す領域は，円$x^2+y^2=4$の内部である.
よって，求める領域は，２つの領域の共通部分であるから，図の斜線部分である.



ただし，**境界を含まない.**

（２）$x+y-2<0$より，$y<-x+2$
これは，直線$y=-x+2$の下側である.
$x^2-y\leqq 0$より，$y\geqq x^2$
これは，放物線$y=x^2$の上側である.
よって，求める領域は，２つの領域の共通部分であるから，図の斜線部分である.



ただし，**直線部分の境界を含まず，曲線部分の境界を含む.**

$\boxed{\text{問 22}}$

（１）図の斜線部分は，原点を中心とする半径3の円の内部で，境界を含まないから，
$x^2+y^2<3^2$
$x^2+y^2<9$・・・①
また，x軸$(y=0)$より上側の部分で，境界を含まないから，
$y>0$・・・②
①，②より，

$$\begin{cases}\boldsymbol{x^2+y^2<9}\\ \boldsymbol{y>0}\end{cases}$$

（２）図の斜線部分は，直線$y=-2x+2$の下側で，境界を含むから，
$y\leqq -2x+2$・・・①
また，直線$y=x-1$の上側で，境界を含むから，
$y\geqq x-1$・・・②
①，②より，

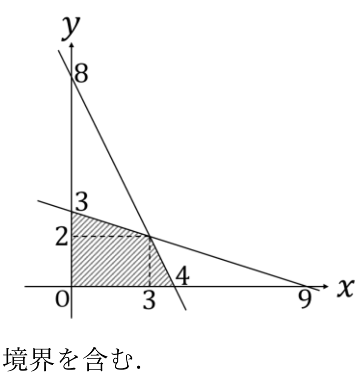
$$\begin{cases}\boldsymbol{y\leqq -2x+2}\\ \boldsymbol{y\geqq x-1}\end{cases}$$

$\boxed{\text{問 23}}$

$x+3y-9\leqq 0$ より，$y\leqq -\dfrac{1}{3}x+3$

$2x+y-8\leqq 0$ より，$y\leqq -2x+8$

２直線$y=-\dfrac{1}{3}x+3$，$y=-2x+8$ の交点の座標は，
(3，2)であるから，４つの領域の共通部分は，図の斜線部分となる.



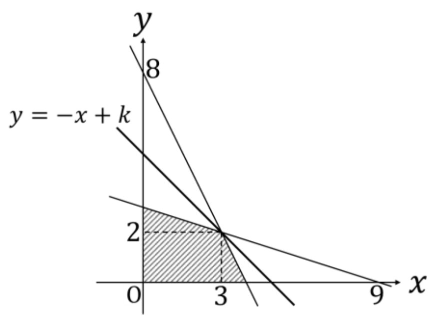
ただし，境界を含む.

（１）$x+y=k$とおくと，$y=-x+k$
この直線が図の領域と共有点をもち，切片kの

値が最大となるのは，この直線が点(3，2)を通るときである．

よって，$x=3$，$y=2$のとき，$x+y$の値は最大となり，

最大値は，$3+2=\mathbf{5}$



（2）$3x+y=k$とおくと，$y=-3x+k$

この直線が図の領域と共有点をもち，切片kの値が最大となるのは，この直線が，点(4，0)を通るときである．

よって，$x=4$，$y=0$のとき，$3x+y$の値は最大となり，最大値は，$3\cdot4+0=\mathbf{12}$